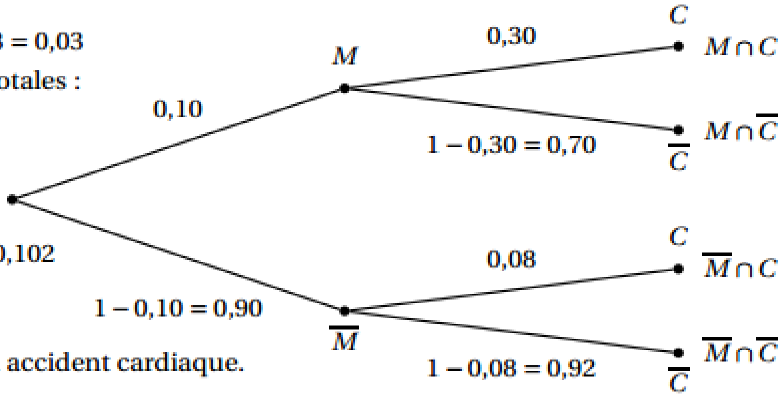
Exercice 1

Partie A En utilisant les données du texte, on peut construire l'arbre pondéré suivant :



1. **a.** $P(M \cap C) = P(M) \times P_M(C) = 0,1 \times 0,3 = 0,03$

   b. D'après la formule des probabilités totales :

   $P(C) = P(M \cap C) + P\left(\overline{M} \cap C\right)$

   $= P(M) \times P_M(C) + P\left(\overline{M}\right) \times P_{\overline{M}}(C)$:

   $= 0,1 \times 0,3 + 0,9 \times 0,08 = 0,03 + 0,072 = 0,102$

2. On choisit au hasard une victime d'un accident cardiaque.

   La probabilité qu'elle présente une malformation cardiaque de type anévrisme est $P_C(M)$:
   $P_C(M) = \dfrac{P(M \cap C)}{P(C)} = \dfrac{0,03}{0,102} \approx 0,2941$

Partie B 1. On peut considérer que, choisir au hasard un échantillon de 400 personnes, peut être assimilé à un tirage avec remise de 400 personnes dans la population totale.
Or la probabilité qu'une personne souffre d'une malformation cardiaque de type anévrisme est $P(M) = 0,1$ d'après le texte.
Donc on peut dire que la variable aléatoire X qui donne le nombre de personnes souffrant de cette malformation cardiaque suit une loi binomiale de paramètres $n = 400$ et $p = 0,1$.

2. Comme X suit la loi binomiale $\mathscr{B}(400;0,1)$, $P(X=35) = \binom{400}{35} 0,1^{35}(1-0,1)^{400-35}$;

   le résultat donné par la calculatrice est approximativement 0,0491.

3. La probabilité que 30 personnes de ce groupe, au moins, présentent une malformation cardiaque de type anévrisme est $P(X \geqslant 30)$ qui est égale à $1 - P(X < 30) = 1 - P(X \leqslant 29)$.
   D'après la calculatrice, $P(X \leqslant 29) \approx 0,0357$, donc $P(X \geqslant 30) \approx 0,9643$.

4. En moyenne, il devrait y avoir E(X) = np = 400x0,1= 40 personnes avec une malformation parmi ces 400 personnes

Partie C 1. On sait que si X suit la loi binomiale $\mathscr{B}(n,p)$, alors l'intervalle de fluctuation asymptotique de la variable aléatoire $F = \dfrac{X}{400}$ au seuil de 95 % est donné par :

$$I = \left[p - 1,96\frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}} ; p + 1,96\frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}}\right] = [0,0706 ; 0,1294] \quad \text{avec } p = 0,1$$

2. Dans l'échantillon considéré, 60 personnes présentent une malformation cardiaque de type anévrisme ; $\dfrac{60}{400} = 0,15 \notin I$. Le taux de malades dans cet échantillon est anormalement élevé.

Exercice 2

Partie A 1. L'algorithme n° 1 calcule tous les termes de v_0 à v_n mais n'affiche que le dernier v_n.
L'algorithme n° 2 calcule n fois de suite v_1 à partir de v_0 : il ne calcule pas les termes de 0 à v_n.
L'algorithme n° 3 calcule tous les termes de 0 à v_n et les affiche tous.

2. D'après les tables de valeurs de la suite (qui correspond en fait à $n = 9$), il semblerait que la suite soit croissante et converge vers un nombre proche de 3.

3. **a.** Montrons par récurrence la propriété $P_n : 0 < v_n < 3$ pour tout entier naturel n.
   Initialisation : $n = 0$, on a bien $0 < v_0 < 3$ vraie, puisque $v_0 = 1$; ainsi P_0 est vraie.
   Hérédité : Supposons P_n vraie, montrons alors que P_{n+1} est vraie.
   On suppose donc que $0 < v_n < 3$. Donc $6 = 6 - 0 > 6 - v_n > 6 - 3 = 3$, puis
   $\dfrac{1}{6} < \dfrac{1}{6 - v_n} < \dfrac{1}{3}$, car la fonction inverse est décroissante sur $]0 ; +\infty[$.
   $\dfrac{3}{2}\dfrac{9}{6} < \dfrac{9}{6 - v_n} < \dfrac{9}{3} = 3$. Ainsi $1 < \dfrac{3}{2} < v_{n+1} < 3$. L'hérédité est établie puisque P_{n+1} est vraie.

Conclusion

Par le principe de récurrence, $P_n : 0 < v_n < 3$ est vraie pour tout entier naturel n.

b. $v_{n+1} - v_n = \dfrac{9}{6-v_n} - v_n = \dfrac{9 - v_n(6-v_n)}{6-v_n} = \dfrac{(v_n-3)^2}{6-v_n}$.

Or, d'après la question précédente, $0 < v_n < 3$ pour tout n entier naturel, ainsi $6 - v_n$ est positif, donc $v_{n+1} - v_n = \dfrac{(v_n-3)^2}{6-v_n} > 0$, ainsi la suite (v_n) est croissante.

c. Comme la suite est majorée par 3 et croissante, alors elle converge vers une limite inférieure ou égale à 3.

Partie B

1. $w_{n+1} - w_n = \dfrac{1}{v_{n+1}-3} - \dfrac{1}{v_n-3} = \dfrac{1}{\frac{9}{6-v_n}-3} - \dfrac{1}{v_n-3} = \dfrac{6-v_n}{3v_n-9} - \dfrac{1}{v_n-3} = \dfrac{6-v_n-3}{3v_n-9} = \dfrac{-v_n+3}{3v_n-9} = -\dfrac{v_n-3}{3(v_n-3)} = -\dfrac{1}{3}$. Ainsi la suite (w_n) est arithmétique de raison $r = -\dfrac{1}{3}$.

2. $w_n = w_0 + nr = \dfrac{1}{1-3} - \dfrac{1}{3}n = -\dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{3}n$.

Comme $w_n = \dfrac{1}{v_n-3}$, on a $v_n = \dfrac{1}{w_n} + 3 = \dfrac{1}{-\frac{1}{2}-\frac{1}{3}n} + 3 = \dfrac{6}{-3-2n} + 3$.

Or $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{6}{-3-2n} = 0$, donc $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = 3$.

Exercice 3

1. a. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1}{x^2} = +\infty$ $\quad \lim\limits_{x\to 0} (1 + \ln x) = -\infty$ donc $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = -\infty$

b. $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln x}{x} = 0$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{x} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{x^2} = 0$

Or $f(x) = \dfrac{1}{x^2} + \dfrac{1}{x} \times \dfrac{\ln x}{x}$ par conséquent $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$

c. $\mathscr{C}$ possède donc une asymptote verticale d'équation $x = 0$ et une asymptote horizontale d'équation $y = 0$. en $+\infty$

2. a. f est un quotient de fonctions dérivables sur $]0\,;+\infty[$ dont le dénominateur ne s'annule pas. Elle est donc dérivable sur $]0\,;+\infty[$.

$$f'(x) = \frac{\frac{1}{x} \times x^2 - 2x(1 + \ln x)}{x^4} = \frac{x - 2x - 2x\ln x}{x^4} = \frac{-x - 2x\ln x}{x^4} = \frac{-1 - 2\ln x}{x^3}$$

b. $-1 - 2\ln x > 0 \Leftrightarrow -1 > 2\ln x \Leftrightarrow \dfrac{-1}{2} > \ln x \Leftrightarrow e^{-0,5} > x$

Par conséquent, puisque x^3 est positif sur $]0\,;+\infty[$, $f'(x)$ est positif sur $]0\,;e^{-0,5}[$ et négatif sur $]e^{-0,5}\,;+\infty[$

x	0		$\frac{1}{\sqrt{e}}$		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	$-\infty$	↗	$\frac{1}{e}$	↘	0

3. a. $f(x) = 0 \Leftrightarrow 1 + \ln x = 0 \Leftrightarrow x = e^{-1}$

La courbe $\mathscr{C}$ coupe donc l'axe des abscisses en un seul point de coordonnées $(e^{-1}\,;0)$

b. $e^{-1} < e^{-0,5}$ par conséquent sur $]0\,;e^{-1}[$, $f(x) < 0$ $\quad$ Sur $]e^{-1}\,;+\infty[$, $f(x) > 0$ $\quad$ Et $f(e^{-1}) = 0$

4. a. On cherche donc $I_2 = \displaystyle\int_{1/e}^{2} f(x)\,dx$ $\quad e^{-1} = \dfrac{1}{e}$ donc f est positive sur $[e^{-1}\,;2]$ et $I_2 \geq 0$

De plus $f(x) \leq f(e^{-0,5})$ par conséquent $I_2 \leq 0,5e\left(2 - \dfrac{1}{e}\right)$ soit $I_2 \leq e - \dfrac{1}{2}$

Donc, finalement, $0 \leq I_2 \leq e - \dfrac{1}{2}$

b. $I_n = F(n) - F\left(\dfrac{1}{e}\right) = \dfrac{-2 - \ln n}{n} - \dfrac{-2+1}{\frac{1}{e}} = \dfrac{-2 - \ln n}{n} + e$

c. $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{-2 - \ln n}{n} = 0$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} I_n = e$.

Cela signifie donc que l'aire comprise sous la courbe et l'axe des abscisses pour des valeurs de x plus grandes que $\dfrac{1}{e}$ vaut e.

Exercice 4

1°) Equation $2z^2 - 2z - 3 = 0$ On a $\Delta = (-2)^2 - 4(2)(-3) = 4+24 = 28 = (2\sqrt{7})^2 > 0$ donc 2 solutions réelles

z_1 (ou x_1) $= \frac{1-\sqrt{7}}{2}$ et z_2 (ou x_2) $= \frac{1+\sqrt{7}}{2}$

2°) Soit f la fonction définie sur l'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes par $f(z) = \frac{z+3}{2z-1}$

a) **La fonction f admet-elle des valeurs interdites ?** oui, il faut avoir $2z-1 \neq 0$ donc $z \neq ½$. C'est la valeur interdite. On notera K le point d'affixe ½

b) **Image par f de $z_1 = 1+i$?** On a $f(1+i) = \frac{1+i+3}{2(1+i)-1} = \frac{4+i}{1+2i} = \frac{(4+i)(1-2i)}{(1+2i)(1-2i)} = \frac{4-8i+i+2}{1^2+2^2} = \frac{6}{5} - \frac{7}{5}i$

et de $z_2 = 4i$? On a $f(4i) = \frac{4i+3}{8i-1} = \frac{(3+4i)(-1-8i)}{(-1+8i)(-1-8i)} = \frac{29}{65} - \frac{28}{65}i$

c) **Points invariants par f ?** On cherche donc les z tels que $f(z) = z \Leftrightarrow z = \frac{z+3}{2z-1} \Leftrightarrow z(2z-1) = z+3 \Leftrightarrow 2z^2-2z-3=0$

D'après la première question, les points invariants sont donc $z_1 = \frac{1-\sqrt{7}}{2}$ et $z_2 = \frac{1+\sqrt{7}}{2}$

3°) a) Antécédent de 0 par f ? On cherche donc les z tels que $f(z) = 0 \Leftrightarrow z+3 = 0$ d'où $z = -3$

b) Antécédent de 1 par f ? On cherche donc les z tels que $f(z) = 1 \Leftrightarrow \frac{z+3}{2z-1} = 1 \Leftrightarrow z+3 = 2z-1 \Leftrightarrow z = 4$

c) ½ a-t-il un antécédent par f ? On cherche donc les z tels que $f(z) = ½ \Leftrightarrow \frac{z+3}{2z-1} = ½ \Leftrightarrow z + 3 = ½(2z-1) = z - ½$

Cette équation n'a pas de solution donc ½ n'a pas d'antécédent par f.

4°) En posant $z = x + iy$, déterminer la partie réelle et la partie imaginaire de $f(z)$.

On obtient $f(z) = \frac{x+iy+3}{2(x+iy)-1} = \frac{(x+3+iy)(2x-1-2iy)}{(2x-1+2iy)(2x-1-2iy)} = \frac{2x^2+5x-3+2y^2}{(2x-1)^2+4y^2} + \frac{-7y}{(2x-1)^2+4y^2}i$

On a donc $x' = \mathrm{Re}(f(z)) = \frac{2x^2+5x-3+2y^2}{(2x-1)^2+4y^2}$ et $y' = \mathrm{Im}(f(z)) = \frac{-7y}{(2x-1)^2+4y^2}$

a) **Ensemble E des points M(z) tel que $f(z)$ soit réel** : on doit avoir $y' = 0 \Rightarrow -7y = 0$ donc $y = 0$
E est donc la droite d'équation $y = 0$ (donc l'axe des x), privée du point K(½), car c'est la valeur interdite.

b) Ensemble F des points $M(z)$ tels que $f(z)$ soit imaginaire pur :

on doit avoir $x' = 0 \Rightarrow 2x^2 + 5x - 3 + 2y^2 = 0$ soit, en divisant par 2 : $x^2 + \frac{5}{2}x + y^2 = \frac{3}{2}$ puis

$(x + \frac{5}{4})^2 - \frac{25}{16} + y^2 = \frac{3}{2}$ donc $(x + \frac{5}{4})^2 + y^2 = \frac{3}{2} + \frac{25}{16} = \frac{49}{16} = (\frac{7}{4})^2$

F est donc le cercle C de centre $\Omega(-\frac{5}{4}\,;\,0)$ et de rayon $R = \frac{7}{4}$, encore privé du point K(½)

5°) a) b) $z_A = 2 - 2i$ son module est $\sqrt{2^2 + (-2)^2} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$ d'où $z_A = 2\sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = 2\sqrt{2}\left(\cos(-\frac{\pi}{4}) + i\sin(-\frac{\pi}{4})\right)$

et $z_B = -1 - i\sqrt{3}$ son module est $\sqrt{(-1)^2 + (-\sqrt{3})^2} = \sqrt{4} = 2$ d'où $z_B = 2\left(-\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 2\left(\cos(-\frac{2\pi}{3}) + i\sin(-\frac{2\pi}{3})\right)$

c) Distance AB = le module de $z_B - z_A$

Or $z_B - z_A = -1 - i\sqrt{3} - (2 - 2i) = -3 + i(2 - \sqrt{3})$ donc

$AB = |z_B - z_A| = \sqrt{(-3)^2 + (2-\sqrt{3})^2} = \sqrt{9 + 4 - 4\sqrt{3} + 3}$

$AB = \sqrt{16 - 4\sqrt{3}} = 2\sqrt{4 - \sqrt{3}}$

$AB \approx 3$